

Lösung zur Kontrollarbeit Mathematik Klasse 11 Analysis Nachschreiber

1. Gegeben ist die Funktion f durch

$$y = f(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 4x + 6)(2 - x), \quad x \in \mathbf{R}$$

(a) Bestimmen Sie den Grad der Funktion durch ausmultiplizieren!

$$y = \left(\frac{x^2}{3} + \frac{4}{3}x + 2\right)(2 - x) = -\frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 4$$

Die Funktion hat den Grad 3!

(b) Untersuchen Sie den Grafen von f auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, auf lokale Extrem- und Wendepunkte!

$$\begin{aligned}f'(x) &= -x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3} \\f''(x) &= -2x - \frac{4}{3} \\f'''(x) &= -2\end{aligned}$$

Nullstellen:

$$y = 0 \Rightarrow x \text{ ist Nullstelle}$$

$$x_1 = 2$$

Schnittpunkt mit der x -Achse: $S(2; 0)$

Schnittpunkt mit der y -Achse: $S(0; 4)$

Extremwerte:

$$f'(x) = 0 = -x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$x_1 \approx 0,39$$

$$x_2 \approx -1,72$$

bei x_1 und x_2 können Extremwerte liegen

$$f''(x_1) \approx f''(0,39) < 0 \Rightarrow \text{bei } x_1 \text{ liegt ein Maximum, } X_{Max}(0,39; 4,14)$$

$$f''(x_2) \approx f''(-1,72) > 0 \Rightarrow \text{bei } x_2 \text{ liegt ein Minimum, } X_{Min}(-1,72; 2,58)$$

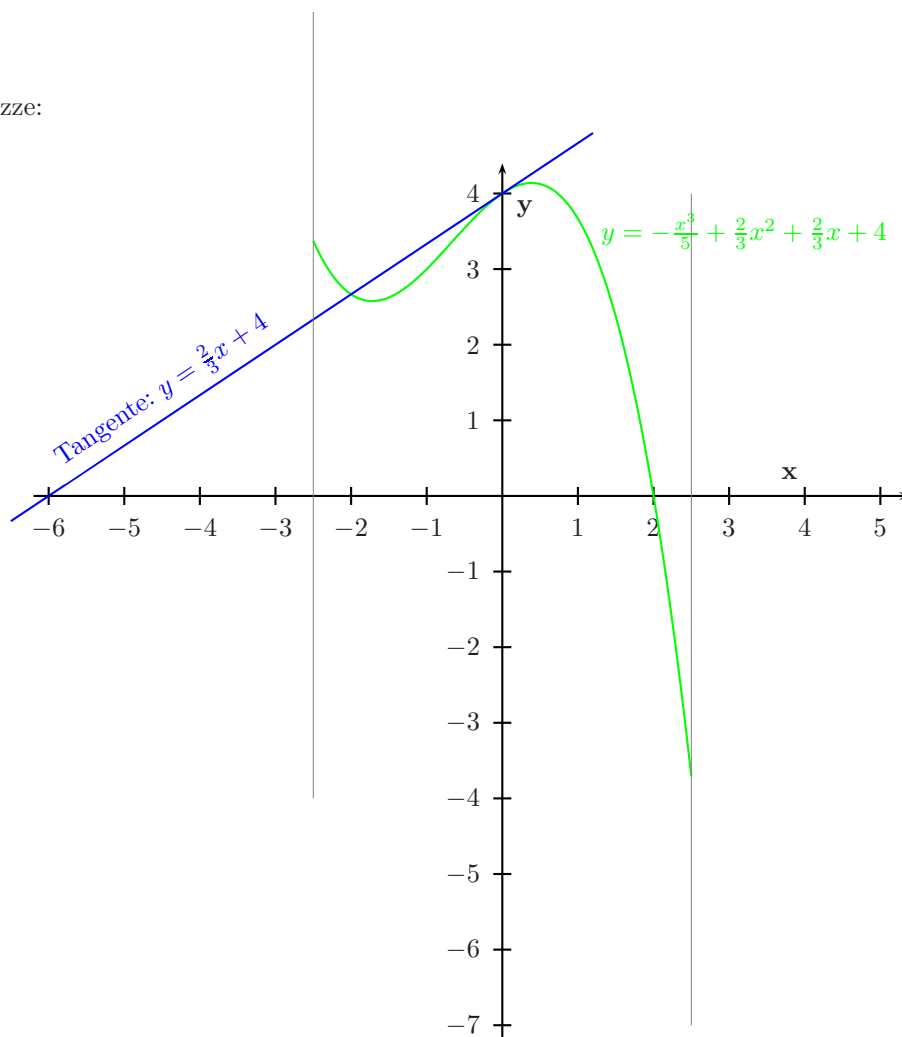
Wendestellen:

$$f''(x) = 0 = -2x - \frac{4}{3} \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

da $f'''(-\frac{2}{3}) = -2 \neq 0$ ist das eine Wendestelle

$$W(-\frac{2}{3}; 3,35)$$

Skizze:



- (c) Im Punkt $W(0; f(0))$ wird an den Graf von f die Tangente gelegt. Diese Tangente begrenzt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Bei der Rotation des Dreiecks um die x -Achse entsteht ein Kegel.

Berechnen Sie das Volumen dieses Kegels!

$$m_t = f'(x) = f'(0) = \frac{2}{3} \Rightarrow y_t = \frac{2}{3}x + 4$$

Kreiszyylinder:

da $r = 4LE$ und $h = 6LE$

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 6 = 100,6LE^3$$

Der Kreisegel hat ein Volumen von ca. $100,6 LE^3$.

`\documentclass[a4paper,10pt]{article}`

```

%\documentclass[a4paper,10pt]{book}
\usepackage{ucs}
\usepackage[utf8]{inputenc}
\usepackage{ngerman}
\usepackage{graphics}
\usepackage{geometry}
\usepackage{pstcol}
\usepackage{pst-grad}
\usepackage{pstricks, pst-node, pst-plot} %zum Einbinden von PSTricks
\setlength{\parindent}{0cm}

\begin{document}
% In der nächsten Zeile beginnt der Text.
\begin{large}Lösung zur Kontrollarbeit Mathematik Klasse 11 Analysis Nachschreiber\end{large}

\begin{enumerate}
%1.)
\item Gegeben ist die Funktion  $f$  durch

$$y=f(x)=\frac{1}{3}(x^2+4x+6)(2-x)$$
 ,  $x \in \mathbb{R}$ 

\begin{enumerate}
%a)
\item Bestimmen Sie den Grad der Funktion durch ausmultiplizieren!

$$y=(\frac{x^2}{3}+\frac{4}{3}x+2)(2-x)=-\frac{x^3}{3}-\frac{2}{3}x^2+\frac{2}{3}x+4$$

Die Funktion hat den Grad 3 !

%b)
\item Untersuchen Sie den Grafen von  $f$  auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, auf lokale Extrem- und Wendepunkte!

$$f'(x)=-x^2-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$$


$$f''(x)=-2x-\frac{4}{3}$$


$$f'''(x)=-2$$


Nullstellen:
 $y=0 \Rightarrow x$  ist Nullstelle
 $x_1=2$ 
Schnittpunkt mit der  $x$ -Achse:  $S(2;0)$ 
Schnittpunkt mit der  $y$ -Achse:  $S(0;4)$ 

Extremwerte:
 $f'(x)=0 \Rightarrow x$ 
 $x_1 \approx 0,39$ 
 $x_2 \approx -1,72$ 

```

bei x_1 und x_2 können Extremwerte liegen\\
 $f''(x_1) \approx f''(0,39) < 0$ \rightarrow bei x_1 liegt ein Maximum, $X_{\text{Max}}(0,39;4,14)$ \\
 $f''(x_2) \approx f''(-1,72) > 0$ \rightarrow bei x_2 liegt ein Minimum, $X_{\text{Min}}(-1,72;2,58)$

Wendestellen: \\
 $f''(x) = 0 = -2x - \frac{4}{3}x^3 \rightarrow x = -\frac{2}{3}$ \\
da $f'''(-\frac{2}{3}) = -2 \neq 0$ ist das eine Wendestelle\\
 $W(-\frac{2}{3};3,35)$
\newpage

Skizze: \\
\psset{unit=1cm}
\begin{pspicture}(-7,-8)(6,5)
\psaxes{->}(0,0)(-6.2,-7.2)(5.4,4.4) %Achsen mit Beschriftung
\rput(3.8,0.3){ \mathbf{x} }
\rput(0.3,3.8){ \mathbf{y} }

\psplot[plotstyle=curve,linewidth=0.8pt,linecolor=green,plotpoints=200]%
{-2.5}{2.5}{x^3 exp -3 div x^2 exp 2 mul 3 div sub x^2 mul 3 div add 4 add}
%y= $-x^3/5 - 4/5x + 3$
\textcolor{green}{\rput(3.2,3.5){ $y = -\frac{x^3}{5} + \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 4$ }}

%Tangente
\psplot[plotstyle=curve,linewidth=0.8pt,linecolor=blue,plotpoints=200]%
{1.2}{-6.5}{x^2 mul 3 div 4 add}
\textcolor{blue}{\rput*{34}(-4.5,1.4){Tangente: $y = \frac{2}{3}x + 4$ }}

\psline [plotstyle=curve,linewidth=0.2pt,linecolor=gray,plotpoints=200]%
(-2.5,-4)(-2.5,6.4)
\psline [plotstyle=curve,linewidth=0.2pt,linecolor=gray,plotpoints=200]%
(2.5,-7)(2.5,4)

%\psplot[plotstyle=curve,linewidth=0.8pt,linecolor=green,plotpoints=200]%
{-2}{3.2}{x -1.94 mul 4.82 add}

\end{pspicture} \\ \\

%c)
\item Im Punkt $W(0;f(0))$ wird an den Graf von f die Tangente gelegt.
Diese Tangente begrenzt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck.\\
Bei der Rotation des Dreiecks um die x -Achse entsteht ein Kegel.\\ \\
Berechnen Sie das Volumen dieses Kegels! \\

$m_t = f'(x) = f'(0) = \frac{2}{3}$ \rightarrow $y_t = \frac{2}{3}x + 4$ \\
 Kreiszyylinder: \\
 da $r=4$ LE und $h=6$ LE \\
 $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot 4^2 \cdot 6 = 100,6$ LE³ \\
 Der Kreiskegel hat ein Volumen von ca. 100,6 LE³.

\end{enumerate}

\end{enumerate}

\end{document}